Die komplexwertige Gammafunktion

Christian Dombacher
Nikolaus Lenaugasse 8
A-2232 Deutsch-Wagram

06.01.2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Die Gammafunktion, eher bekannt als Verallgemeinerung der Faktoriellen, wurde von L. Euler eingeführt. Einige Jahre später betrachtete C.F. Gauß die Gammafunktion erneut, aber diesmal unter Einschluß der komplexen Zahlen. K. Weierstraß betrachtete den Kehrwert der Gammafunktion und zog daraus seine Schlüsse. Heute findet die Gammafunktion Anwendung in vielen Gebieten, u.a. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Gammaverteilung), in der Integralrechnung und in der Analysis (Lösung von Reihen und Produkten) [3].

Ausgehend von einer Darstellung der Gammafunktion im Reellen soll dieser Artikel eine kurze Einführung in die bestechendsten Merkmale der komplexwertigen Gammafunktion geben. Eine elektronische Version kann frei von der Website **http://www.telecomm.at**, Abteilung **Resources** bezogen werden.

2. Die reelle Gammafunktion

Ausgehend von der *eulerschen Darstellung* der Gammafunktion

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \text{ mit } a > 0$$

sollen hier nun einige wichtige Merkmale der reellen Gammafunktion skizziert werden. Durch Teilung des Integrationsintervalls an der Stelle 1 ergibt sich $\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$. Dabei konvergiert das erste Integral genau für $a > 0$, für das zweite Integral ist $\int_1^\infty x^n e^{-x} dx$ eine konvergente Majorante für $a \in [n, n+1)$ mit n aus der Menge der natürlichen Zahlen und $n > 0$. Somit ergibt sich als Definitionsbereich die positive reelle Achse [9].

Partielle Integration [8] liefert für $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx &= -e^{-x} x^a \Big|_0^\infty + a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \\ &\Longrightarrow \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

mit

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

Wählt man in 2.1 für a eine natürliche Zahl $n \geqq 1$, so findet man $\Gamma(n+1) = n!$. Im Folgenden wird gezeigt werden, daß außerdem noch gilt: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Der zugehörige Beweis wird bis zur Behandlung der komplexwertigen Gammafunktion aufgeschoben. Bild 2.1 zeigt eine graphische Darstellung der reellen Gammafunktion, wobei hier schon die Fortsetzung der Gammafunktion auf die negative Achse vorweggenommen wurde. Diese leitet sich aus der *Produktdarstellung von Gauß* ab, die im Zuge der komplexwertigen Gammafunktion behandelt wird.

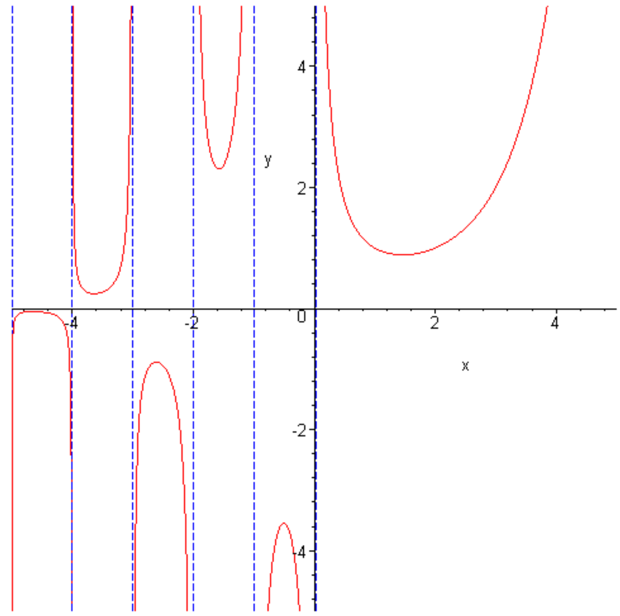

Abbildung 2.1: Die reelle Gammafunktion (Quelle: [10])

3. Die komplexe Gammafunktion

3.1. Grundlegende Eigenschaften

Der Integrand $f(a,x) := x^{a-1}e^{-x}$ erlaubt für positives x eine komplexe Fortsetzung, indem man mit $x^a := e^{x \log a}$ definiert, wobei man für den komplexen Logarithmus den Hauptzweig am besten so festlegt, daß die negative reelle Achse herausgeschnitten wird. Legt man in dieser Form $f(a,x)$ fest, so kann durch ein für $\mathrm{Re}(a) > 0$ konvergentes komplexwertiges Integral $\int_0^\infty f(a,x)dx$ die Gammafunktion für alle solchen komplexen Werte definiert werden. Die komplexe Differenzierbarkeit folgt aus Sätzen der Integralrechnung (dazu siehe [9] und [16]).

3.2. Analytische Fortsetzung der Gammafunktion

Genauso wie für $a > 0$ läßt sich für $\mathrm{Re}(a) > 0$ aus 2.1 durch partielle Integration für $\mathrm{Re}(z) > n$ die Rekursionsformel

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z) \tag{3.1}$$

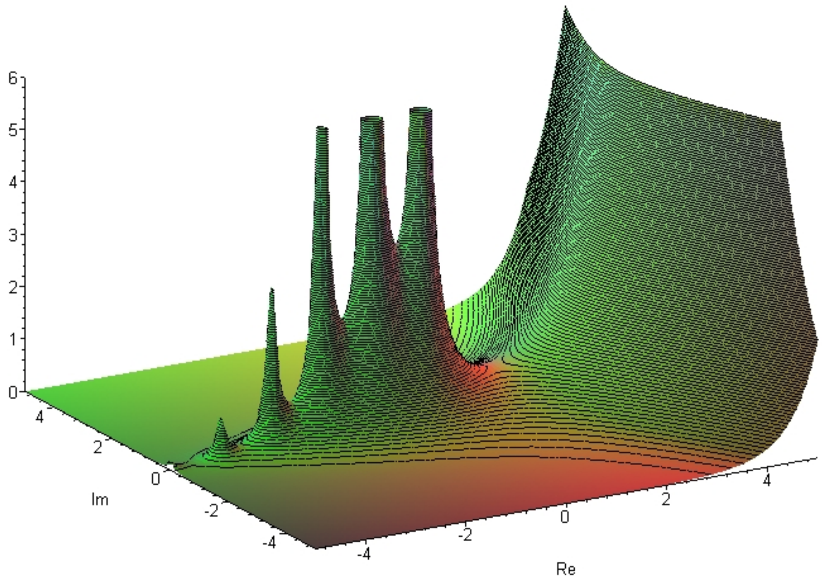

Abbildung 3.1: Die komplexe Gammafunktion (Quelle: [10])

herleiten. 3.1 kann benützt werden, um die Gammafunktion auch für alle komplexen Werte von z ungleich einer negativen ganzen Zahl durch

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)} \tag{3.2}$$

zu definieren. Offensichtlich hat $\Gamma(z)$ einfache Pole für jede negative ganze Zahl und ist ansonst auf der ganzen komplexen Ebene definiert. $\Gamma(z)$ gehört damit der Klasse der *meromorphen Funktionen* an [11]. Dies erklärt auch die Darstellung in Bild 2.1 für negative Werte von a. Der Vollständigkeit halber zeigt Bild 3.1 eine Darstellung der komplexen Gammafunktion.

3.3. Produktdarstellung der komplexen Gammafunktion

Da die Nullstellen von $\sin \pi z$ alle ganzen Zahlen sind und es sich bei diesen nur um einfache Nullstellen handelt (die Ableitung $\cos \pi z$ verschwindet nicht für ganzes z), hat $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ ausschließlich einfache Pole an den selben Stellen. Aus 3.2 wissen wir, daß $\Gamma(z)$ für negative ganze Zahlen einfache Polstellen besitzt. Es ist daher naheliegend, einen Zusammenhang zwischen beiden Funktionen zu vermuten.

Ausgehend von der Produktdarstellung [6] $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$ versucht man, eine möglichst einfache Funktion $G(z)$ zu finden, die einfache Nullstellen bei allen negativen ganzen Zahlen aufweist,

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Da $G(-z)$ Nullstellen bei allen positiven ganzen Zahlen annimmt, kann $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ nun als Produkt von $G(z)$ und $G(-z)$ geschrieben werden, d.h. $\frac{\sin \pi z}{\pi} = zG(z)G(-z)$. Dem Beweis von [7] folgend, erkennt man, daß $G(z-1)$ neben einer zusätzlichen Nullstelle im Ursprung die selben Nullstellen wie $G(z)$ aufweist. Somit ist $\frac{G(z-1)}{zG(z)}$ eine ganze Funktion bzw. läßt sich zu einer solchen fortsetzen, da alle Singularitäten hebbar sind. Des weiteren besitzt $\frac{G(z-1)}{zG(z)}$ keine Nullstellen. Da nun kann jede Funktion, die im Komplexen nicht verschwindet, in die Form $e^{\gamma(z)}$ mit einer passenden ganzen Funktion $\gamma(z)$ gebracht werden kann, ergibt sich

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z) \tag{3.3}$$

Um $\gamma(z)$ zu bestimmen, bildet man auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung

$$(\log(G(z-1)))' = \frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$(\log(ze^{\gamma(z)}G(z))' = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \tag{3.4}$$

und setzt diese gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \tag{3.5}$$

Ein Indexwechsel in der linken Summe (n ersetzen durch $n+1$) ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + 1$$
$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

und damit im Vergleich mit der rechten Seite von Gleichung 3.5 $\gamma'(z) = 0$, d.h. $\gamma(z) = \gamma$ konstant. Somit reduziert sich 3.3 zu

$$G(z-1) = ze^{\gamma}G(z) \tag{3.6}$$

Auswertung des rechten Terms an der Stelle $z = 1$ ergibt

$$\frac{1}{e^{\gamma}} = G(1) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}}$$

wobei das n-te Partialprodukt die Form $(n+1)e^{-(1+1/2+1/3+...+1/n)}$ annimmt. Logarithmieren liefert

$$\log e^{-\gamma} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \log e^{-(1+1/2+1/3+...+1/n)} e^{-\frac{1}{n}}$$

$$\gamma = \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log n) \tag{3.7}$$

Dabei bezeichnet γ die *Eulersche Konstante*, deren Wert sich annähernd auf 0.5772156 beläuft. Ist $H(z)$ eine beliebige meromorphe Funktion mit einfachen Polen und Nullstellen, welche der Funktionalgleichung

$$H(z-1) = zH(z) \tag{3.8}$$

genügt, und setzt man $G(z) := H(z)e^{-\gamma z}$, so erfüllt $G(z)$ offensichtlich die Funktionalgleichung 3.6. Nun gilt Gleichung 3.8 auch für $H(z) := \frac{1}{z\Gamma(z)}$ und führt schlußendlich zur bekannten Relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Diese Gleichung entspricht der komplexen Variante von Gleichung 2.1, sodaß $\Gamma(z)$ nun als *komplexe Gammafunktion* bezeichnet werden kann. Einsetzen von $H(z)$ und dann von $G(z)$ liefert die explizite *Produktdarstellung* der Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \tag{3.9}$$

und $\frac{\sin \pi z}{\pi} = zG(z)G(-z)$ wird zu

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{3.10}$$

Aus dem Ausdruck 3.10 lassen sich auf einfache Weise weitere Merkmale der Gammafunktion ableiten, die auch für den reellen Fall interessant sind [6]:

- An der Stelle $z = \frac{1}{2}$ nimmt 3.10 den Wert $\sqrt{\pi}$ an, d.h. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- Aus $\sin z = \cos(z + \frac{\pi}{2})$ und 3.10 folgt $\Gamma(\frac{1}{2} + z)\Gamma(\frac{1}{2} - z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$ sowie $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\sin \pi z}$

Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion läßt sich nun auch auf einfache Weise aus der Identität $\log(\frac{1}{H(z)}) = \log 1 - \log(H(z)) = -\log(H(z))$ und der Darstellung von $H(z)$ bzw. von $G(z)$ aus Gleichung 3.4 gewinnen

$$\Psi(z) := (\log \Gamma(z))' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \tag{3.11}$$

Die zugehörige Ableitung lautet

$$\Psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \tag{3.12}$$

Diese Reihe konvergiert normal, da meromorphe Funktionen gliedweise differenziert werden dürfen [6].

3.4. Die Gaußsche Formel

Ausgehend von der expliziten Produktdarstellung der Gammafunktion läßt sich die Gaußsche Formel leicht ableiten: aus Gleichung 3.9 folgert man

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{k \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{k} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \\
&= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{k \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{n e^{\frac{z}{n}}}{z+n} \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z} k!}{z(z+1)...(z+k)} e^{z(1+1/2+...+1/k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{k!}{z(z+1)...(z+k)} e^{z(-\gamma+1+1/2+...+1/k)} \\ &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{k! k^x}{z(z+1)...(z+k)} e^{z(-\gamma+1+1/2+...+1/k-\log k)} \end{aligned}$$

Einsetzen von Gleichung 3.7 führt zur endgültigen Darstellung der *Gaußschen Formel* für die Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{k! k^z}{z(z+1)...(z+k)} \tag{3.13}$$

wobei hier die bereits bekannten Polstellen $z = 0, -1, -2, ...$ aus dem Definitionsbereich auszuschliessen sind.

3.5. Satz von Bohr-Mollerup

Eine einfache, eindeutige Charakterisierung der Gammafunktion wurde von H. Bohr und J.Mollerup gefunden:

Theorem 3.1 (Bohr-Mollerup). *Eine auf $(0, \infty)$ definierte logarithmisch konvexe Funktion $f(x)$ ist gleich der Gammafunktion $\Gamma(x)$, soferne sie folgende Kriterien erfüllt*

- $f(1) = 1$
- $f(x+1) = xf(x)$ *für alle* x

Beweis. Aus 3.12 folgt $\Psi'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Daraus folgt wiederum die Monotonie (steigend) der logarithmischen Ableitung $\Psi(x) = (\log \Gamma(x))'$. Somit ist $\log \Gamma(x)$ eine konvexe Funktion. Aus $f(1) = 1$ und der Funktionalgleichung von f leitet sich $f(n+1) = \Gamma(n+1) = n!$ für alle natürlichen n und die folgende Rekursionsformel ab

$$f(x+n) = x(x+1)...(x+n-1)f(x) \tag{3.14}$$

womit im Vergleich mit Formel 3.1 ein weiterer Hinweis auf die Gammafunktion gegeben ist. Somit genügt es, die Gleichung $f(x) = \Gamma(x)$ für reelles x mit $0 < x \leqq 1$ nachzuweisen [2]. Danach folgt die Gleichung für Werte $x > 1$ durch Verwendung der Rekursionsformeln 3.14 und 3.1. Sei x wie zuvor definiert und $n > 2$. Aus der logarithmischen Konvexität von $f(x)$ folgt nun

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1)-n} \leqq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n)-n} \leqq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1)-n}$$

Aus Formel 3.14 folgt nun $f(m) = (m-1)!$ für jede natürliche Zahl $m \geqq 1$ und damit ergibt sich aus vorangehender Ungleichung

$$-\log(n-2)! + \log(n-1)! \leqq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leqq \log n! - \log(n-1)!$$

$$x \log(n-1) \leqq \log f(x+n) - \log(n-1)! \leqq x \log n$$

$$x \log(n-1) + \log(n-1)! \leqq \log f(z+n) \leqq x \log n + \log(n-1)!$$

$$(n-1)^x (n-1)! \leqq f(x+n) \leqq n^x (n-1)!$$

Anwenden von Formel 3.14 ergibt

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)} \leqq f(x) \leqq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)}$$

Dabei zeigt sich, daß $f(x)$ unabhängig vom Index n ist und somit die gewonnene Ungleichung für alle $n \geqq 2$ gilt. Durch Substitution von $(n-1)$ durch n auf der linken Seite und Erweiterung auf der rechten Seite folgert man

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)} \leqq f(x) \leqq \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)} \left(\frac{x+n}{n} \right)$$

Einsetzen der Gaußschen Formel ergibt

$$\Gamma(x) \leqq f(x) \leqq \Gamma(x) \left(\frac{x+n}{n} \right)$$

Läßt man nun $n \longrightarrow \infty$ gehen und beachtet man, daß $\lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{x+n}{n} \right) = 1$ ist, so folgt $f(x) = \Gamma(x)$ für $0 < x \leqq 1$ und damit für alle x. Der angegebene Beweis wurde fast ausschließlich im Reellen geführt, die Anwendung der komplexen Analysis beschränkte sich auf den Nachweis der logarithmischen Konvexität von $f(x)$, der allerdings ohne diese Hilfsmittel wesentlich länger ausgefallen wäre. Ein Beweis, lediglich reelle Analysis benützend, findet sich in [8].

3.6. Die Verdoppelungsformel von Legendre

Die *Verdoppelungsformel von Legendre* schafft einen Bezug zwischen $\Gamma(2z)$ und $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$. Dabei sei auch auf die allgemeineren *Multiplikationsformeln von Gauß* für $\Gamma(kz)$, mit k eine beliebige natürliche Zahl, hingewiesen. Weitere Informationen dazu sind in [6] und [9] zu finden.

Theorem 3.2 (Verdoppelungsformel von Legendre). *Die komplexe Gammafunktion $\Gamma(z)$ genügt der Gleichung*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \tag{3.15}$$

Beweis. Sei

$$F(2z) := \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{1}{2}-2z}}$$

Subsitution von $w = \frac{z}{2}$ liefert

$$F(w) = \frac{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{1}{2}-w}} \tag{3.16}$$

Es ergibt sich folgende Rekursion für F

$$\begin{aligned}
F(w+1) &= \Gamma\frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{1}{2}-w}2^{-1}}\Gamma\left(\frac{w+2}{2}\right) \\
&= 2\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)^{-1}F(w)\Gamma\left(\frac{w}{2}+1\right) \\
&= 2F(w)\left(\frac{w}{2}\right)^{-1}\frac{w}{2}\Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \\
&= wF(w)
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch genau eine der Funktionalgleichungen der Gammafunktion. Einsetzen von $w = 1$ in $F(w)$ liefert

$$F(1) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)}{\sqrt{2\pi}2^{-\frac{1}{2}}} = 1$$

Aus dem Satz von Bohr-Mollerup folgt, daß der Zähler der rechten Seite der Gleichung 3.16 logarithmisch konvex ist. Somit bleibt lediglich der Nenner

$-\log \sqrt{2\pi} 2^{\frac{1}{2}-w}$ zu überprüfen. Da die Konstanten keinen Einfluß haben, genügt es, den Ausdruck $-\log 2^{-w}$ genauer zu betrachten. Ableiten liefert 2^w. Dieser Ausdruck steigt monoton mit w, somit ist die logarithmische Konvexität des Nenners und damit von $F(w)$ gezeigt. Anwenden des Satzes von Bohr-Mollerup über die Eindeutigkeit der Gammafunktion liefert nun $F(z) = \Gamma(z)$.

3.7. Die Stirlingsche Formel

Die Stirlingsche Formel wurde bereits 1730 von J. Stirling für die Faktorielle bewiesen [13] und lautet

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \varphi(n)$$

Dabei bezeichnet $\varphi(n)$ eine Funktion mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi(n) = 1$. Je größer n, desto besser die Approximation also. Unter Ausnutzung der Identität $e^0 = 1$ läßt sich die Stirlingsche Formel auch so anschreiben

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\psi(n)} \text{ mit } \lim_{n \longrightarrow \infty} \psi(n) = 0$$

Davon ausgehend liegt es nahe, eine Verallgemeinerung der Stirlingschen Formel für die Gammafunktion wie folgt zu formulieren

$$\Gamma(z) = a z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)} \text{ mit } \lim_{z \longrightarrow \infty} \mu(z) = 0 \text{ und } \operatorname{Re}(z) > 0 \tag{3.17}$$

Diesem Ansatz folgend ist es notwendig, den Koeffizienten a sowie die Funktion $\mu(z)$ zu bestimmen und letztere Funktion auf Konvergenz gegen 0 für $z \longrightarrow \infty$ zu überprüfen [6].

Basierend auf Gleichung 3.17 und unter der Annahme der Konvergenz, muß die Funktion $\mu(z)$ von folgender Bauart sein

$$h(z) := \log \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z + z - c \tag{3.18}$$

Dabei entspricht $c := \log a$. Der Definitionsbereich von $h(z)$ umfaßt ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der negativen reellen Achse (bezeichnet als $\mathbb{C}^-$). Im **ersten Schritt** soll die Konstante a unter der Annahme $\lim_{x \longrightarrow \infty} h(x) = 0$ für ein reelles x gefunden werden. Dazu zeigt man, daß

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (h(x+n) - h(n)) = 0 \text{ für } x \in (0,1)$$

gilt. Einsetzen liefert

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \log\Gamma(x+n) - \log\Gamma(n) - \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) + \left(n-\frac{1}{2}\right)\log n + x$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \log\Gamma(x+n) - \log\Gamma(n) - x\log n - \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right) + x \quad (3.19)$$

Setzt man Gleichung 3.1 in die Gaußsche Produktdarstellung 3.13 ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^z\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} \\
&\Longrightarrow 1 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^z}{\Gamma(z+n+1)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\Gamma(n+1)n^z}{\Gamma(z+n+1)} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)\Gamma(n)n^z}{(z+n+1)\Gamma(z+n)} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\Gamma(n)n^z}{\Gamma(z+n)} = 1
\end{aligned}$$

Logarithmieren ergibt

$$g_1(z) := \lim_{n\longrightarrow\infty} (\log\Gamma(n) + z\log n - \Gamma(z+n)) = 0$$

Somit bleibt der Term $g_2(x) := x - \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ zu betrachten. Dazu teilt man $g_2(x)$ wie folgt auf

$$\begin{aligned}
g_2(x) &= x - \lim_{n\longrightarrow\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&= x - n\log e^{\frac{x}{n}} - \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)
\end{aligned}$$

und wendet für den letzten Term die Regel von L'Hospital an

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} -\frac{n}{n+x}/\frac{2}{(2n-1)^2} = 0$$

Also gilt $g_2(x) = x - n\frac{x}{n} = 0$ und in weiterer Folge $\lim_{n\longrightarrow\infty}(h(x+n) - h(n)) = g_1(x) + g_2(x) = 0$. In der weiteren Betrachtung kann die Grenzwertbildung $\lim_{x\longrightarrow\infty} h(x) = 0$ nun auf $x = n$, $n \in \mathbb{N}$ beschränkt werden.

Somit stellt sich die Frage, ob die Konstante a so gewählt werden kann, daß $\lim_{n\longrightarrow\infty} h(n) = 0$ wird. Dazu wendet man die Legendre'sche Verdoppelungsformel 3.15 auf $\Gamma(z) = az^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{h(z)}$ mit $h(z)$ wie in Gleichung 3.18 definiert an. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
a(2z)^{z-\frac{1}{2}}e^{-2z}e^{h(2z)} &= a^2 z^{z-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)^z e^{-z}e^{-z-\frac{1}{2}}e^{h(z)}e^{h(z+\frac{1}{2})}2^{2z-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \\
\Longrightarrow \sqrt{2}e^{h(2z)} &= a\left(1+\frac{1}{2z}\right)^z \sqrt{e}e^{h(z)}e^{h(z+\frac{1}{2})}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \\
&\Longrightarrow \sqrt{2\pi e}e^{h(2z)-h(z)-h(z+\frac{1}{2})} = a\left(1+\frac{1}{2z}\right)^z
\end{aligned}$$

Mit $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \sqrt{e}$ und der Annahme $\lim_{x\longrightarrow\infty} h(x) = 0$ folgt $\sqrt{2\pi} = a = e^c$. Somit ergibt sich für $\mu(z)$ folgender Ausdruck

$$\mu(z) = \log\Gamma(z) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + z - \log\sqrt{2\pi}$$

der bis auf eine additive Konstante $2\pi ik$ (k bezeichnet eine ganze Zahl) eindeutig bestimmt ist.

Im **zweiten Schritt** gilt es nun zu zeigen, daß das gefundene $\mu(z)$ auch wirklich gegen 0 für $z \longrightarrow \infty$ konvergiert. Dazu wird $\mu(z)$ in eine Reihe entwickelt. Sei $g(z) := \mu(z) - \mu(z+1)$. Dann hat $g(z)$ folgende Gestalt

$$\begin{aligned}
g(z) &= \log\Gamma(z) - \log\Gamma(z+1) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \left(z+\frac{1}{2}\right)\log(z+1) - 1 \\
&= \log\frac{\Gamma(z)}{z\Gamma(z)} - \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \left(z+\frac{1}{2}\right)\log(z+1) - 1 \\
&= \left(z+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{z+1}{z}\right) - 1
\end{aligned}$$

wobei $\mu(z) = \mu(z+1) + g(z)$ sich rekursiv erweitern läßt

$$\mu(z) = \mu(z+n) + \sum_{k=0}^{\infty} g(z+k)$$

Da $\mu(z)$ beschränkt ist, folgt die Konvergenz $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(z+n) = 0$ aus der Konvergenz der *Gudermannschen Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(z+k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(z+k+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{z+k+1}{z+k}\right) - 1\right) \tag{3.20}$$

Dazu wird zunächst gezeigt, daß $g(z)$ eine Integraldarstellung besitzt

$$g(z) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}{(z+t)(z+1-t)}dt \tag{3.21}$$

Beweis. Die elementare Integration sei hier vorgeführt. Dazu wird das Integral in zwei Terme gespalten und im zweiten Term Gebrauch von der Substitution $t = 1-u$ gemacht.

$$\begin{aligned}
g(z) &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}{(z+t)(z+1-t)}dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)(z+1-t)}dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t+z-z)\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)(z+1-t)}dt \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{((z+t)-(z+1-t))\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)(z+1-t)}dt \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(z+t)\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)(z+1-t)}dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(z+1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)(z+1-t)}dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)}dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+1-t)}dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-u\right)}{(z+u)}du = \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)}{(z+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\left(z+\frac{1}{2}-z-t\right)}{(z+t)}dt = \int_0^1 \left(\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)}{(z+t)} - 1\right)dt \\
&= \left(z+\frac{1}{2}\right)\log(z+t)\Big|_0^1 - 1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{z+1}{z}\right) - 1 \\
&= g(z)
\end{aligned}$$

Ausgehend von $(x+t)(x+1-t) = x(x+1) + t(1-t) \geqq x(x+1)$ für alle reellen x und $t \in [0,1]$ läßt sich für $g(x)$, dargestellt durch das Integral 3.21, eine einfache Abschätzung finden

$$\begin{aligned}
0 &< g(x) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}{(x+t)(x+1-t)}dt \\
&\leqq \frac{2}{x(x+1)}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 dt
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)
\end{aligned}
$$

Um für komplexes z eine Abschätzung des Betrags $|g(z+k)|$ zu gewinnen, wird nun die Ungleichung

$$|z+t| \geqq (|z|+t)\cos\frac{\varphi}{2} \text{ für alle } t \geqq 0 \tag{3.23}$$

hergeleitet. Dabei bezeichnet φ den Winkel der Polardarstellung von z, d.h. $z = |z|\, e^{i\varphi}$.

Beweis. Sei $r := |z|$ und $t \geqq 0$. Dann gilt

$$|z+t| = \sqrt{r^2+t^2+2rt\cos\varphi}$$

nach dem Kosinussatz. Nun wird der Wurzelausdruck abgeschätzt

$$
\begin{aligned}
\sqrt{r^2+t^2+2rt\cos\varphi} &= \sqrt{(r+t)^2-2rt(1-\cos\varphi)}\\
&= \sqrt{(r+t)^2-4rt\sin^2\frac{\varphi}{2}}\\
&= \sqrt{(r+t)^2+4rt\cos^2\frac{\varphi}{2}-4rt}\\
&\geqq \sqrt{\left((r+t)^2+4rt-4rt\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}}\\
&= (r+t)\cos\frac{\varphi}{2}
\end{aligned}
$$

Nun wird die Ungleichung 3.23 dazu verwendet, um für komplexes z den k-ten Term $g(z+k)$, die Integraldarstellung 3.21 benützend, betragsmäßig wie folgt abzuschätzen

$$
\begin{aligned}
|g\left(z+k\right)| &\leqq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}{|z+k+t|\,|z+k+1-t|}dt\\
&\leqq 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}{\left(|z|+k+t\right)\left(|z|+k+1-t\right)}dt\\
&= \cos^2\frac{\varphi}{2} g\left(|z|+k\right)
\end{aligned}
$$

Abschätzen mittels der eben gewonnenen Ungleichung sowie des Ausdrucks 3.22 ergibt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} g(z+k)\right| &\leqq \cos^2\frac{\varphi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}|g(z+k)| \leqq \cos^2\frac{\varphi}{2}\sum_{k=0}^{\infty} g(|z|+k) \\ &\leqq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{|z|+k}-\frac{1}{|z|+k+1}\right)=\frac{1}{12}\frac{1}{|z|}\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die absolute Konvergenz der Gudermannschen Reihe als Konsequenz der Abschätzung für $\sum_0^\infty g(z+k)$. Damit konvergiert auch die Funktion $\mu(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow \infty$. Die verallgemeinerte Stirlingsche Formel für komplexe z lautet nun

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$$

In der Literatur gibt es noch weitere Beweise für die Stirlingsche Formel. Einen konstruktiven Beweis gibt [1], Beweise für die reelle Variante der Stirlingschen Formel geben [8] und [14].

Literaturverzeichnis

[1] Markushevich A.I. - *Theory of Functions I-III* - Chelsea Publishing 1965-1967

[2] Conway J.B. - *Functions of One Complex Variable I* - Springer 1978

[3] Schlömilch O. - *Theorie der Gammafunktionen* - Leipzig 1848

[4] Srivastava H.M., Kashyap B.R.K. - *Special Functions in Queueing Theory* - Academic Press 1982

[5] Remmert R., Schuhmacher G. - *Funktionentheorie I* - Springer 2002

[6] Remmert R. - *Funktionentheorie II* - Springer 1991

[7] Alfohrs L. - *Complex Analysis* - McGrawHill 1966

[8] Erwe Friedhelm - *Differential- und Integralrechnung Band 2* - BI Hochschultaschenbuch Band 31, 1962

[9] Mlitz R. - *Analysis 3, Skriptum zur Vorlesung* - TU Wien 2003

[10] Wikipedia Freie Encyklopädie - Die Gammafunktion - http://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion

[11] Nevanlinna R., Paatero V. - *Introduction to Complex Analysis* - Addison Wesley 1969

[12] Courant R., John F. - *Introduction to Calculus & Analysis I+II*, Springer 2000

[13] Knuth D. - *The Art Of Computer Programming, Vol. 1, Fundamental Algorithms* - Addison Wesley 1973

[14] Knopp K. - *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* - Springer 1996

[15] Weierstraß K. - *Über die Theorie der analytischen Facultäten* - Crelle J. LI 1856

[16] Mlitz R. - *Analysis 2, Skriptum zur Vorlesung* - TU Wien 2002